1. Проблема Пуакаре

2. Контест

1 . Определение. *N - мерное топологическое пространство без края — хаусдорфово топологическое пространство со счетной базой, в котором каждая точка имеет открытую окрестность, гомеоморфную открытому подмножеству* $\mathbb{R}^n$.

2 . Проблема Пуакаре. *Всякое односвязное компатное многообразие эквивалентно сфере.*
Это наш контекст.

3 . Обозначения.

3.1 . P^n исходное многообразие Пуанкаре. $\hat{M}^n \subset P^n$ подмножество замкнутое, односвязное с непустой внутренностью, такое что дополнение к нему имеет также непустую внутренность. $V \subset \hat{M}^n$ окрестность и $h: V \to v_\varepsilon$ ее гомеоморфизм на подмножество в $\mathbb{R}^n$.

3.2 . Δ_n стандартный симплекс в R^n с **n+1** вершинами, $\partial \Delta^n$ поверхность этого симплекса.

3.3 . Пусть $\{\Delta_n^i\}$, $i=1, \dots, n+2$. Ввведем операцию склейки $\underset{i=1}{\overset{n+2}{СКЛ}}\{\Delta_n^i\}$ стандартных симплексов в поверхность симплекса $\partial \Delta_{(n+1)}$.

4 . Определения.

4.1 . Назовем замкнутое подмножество *односвязным в себе*, если все петли принадлежащие ему стягиваемы в нем.

4.2 . Пусть задан замкнутый стандартный симплекс Δ_n , a его вершина. Назовем

$$F_\Delta^n: (0,h] \times \Delta_{(n-1)} \to \Delta_n \setminus a$$

где h высота, F_Δ^n *поглощающим оператором,* $\Delta_{(n-1)}$ *образцом,* a *точкой рождения.*

Оператор получается равномерным движением с пропорциональным изменением размера грани $\Delta_{(n-1)}$ противоположной a паралельно исходному положению.
Нетрудно видеть что положение точки *рождения* на самом деле произвольно, т.е. можно расположить ее где угодно, включая внутренность Δ_n .
Образцом также может быть любая проекция $\partial \Delta_n$ на себя если определен гомеоморфизм распространяющий ее как на $\partial \Delta_n \setminus a$, так и на $\partial \Delta_n$.

Видно, что F_Δ^n на самом деле семейство отображений. В дальнейшем под F_Δ^n будет подразумеваться конкретный элемент этого семейства.

4.3 . Будем говорить что F_Δ^n ***фиксирует*** метрику и геомерию Δ_n в $\hat{V}^n$,

$f:\Delta_n \to \hat{V}$ (с возращением точки a), в том смысле, что гомеоморфизм $f:\Delta_n \to \hat{V}$ индуцирует в $\hat{V}^n$ метрику. Этот гомеоморфизм *транслирует* метрику.

С момента введения оператора считаем что вся метрика и геометрия Δ_n диктуется им и только им.

Если не оговорено иное, то для F_Δ^n ***образцом*** полагается $\partial \Delta_n$, а точкой ***рождения*** a центр тяжести Δ_n .
Важно, что a не входит в область определения и в область значений *поглощающего оператора.*
Важно. Образец берется в более низкой размерности.
Пояснение. Изъятие точки a сопровождается 'изъятием' инвариантов Δ_n и замещением их иварантами присущими $\Delta_n \setminus a$. Когда нам будет удобно мы вернем ее, но вместе с инвариантами присущими множеству в которое происходит это возвращение.

4.4 . $\hat{A}=\partial M$ замкнутое компактное, односвязное в себе в индуцированной из P^3 топологии, точка $a \in M$ и $a \notin \hat{A}$. Пусть f_s поток $f:(0,h] \times \hat{A} \to \hat{A}_s$ в $\hat{M} \setminus a$ исходящий из a к аттрактору $\hat{A}$ движущийся , такой, что:

$$f(h)=\hat{A}$$

$\forall s \in (0,h)$ $f(s_1)=\hat{A}_{s_1}$ рассекает $\hat{M}$ на подмножества $\hat{M}_g$, $\hat{M}_l$ такие, что $\hat{M}_g \cap \hat{M}_l = \hat{A}_{s_1}$ и $\hat{M}_g \cup \hat{M}_l = \hat{M}$

$f(s_1)=\hat{A}_{s_1}$ и $f(s_2)=\hat{A}_{s_2}$ $\hat{A}_{s_1} \cap \hat{A}_{s_2} = \emptyset$ при $s_1 \neq s_2$.

Будем записывать его как ${}_M F_a^n$. Это *поглощающий оператор* определенный на $\hat{M} \setminus a$.
Отметим что скорость точки на ее траектории не равна нулю.
Если в $\hat{M} \setminus a$ есть метрика, то оператор ее зафиксирует.
Далее будет видно, что: если на $\hat{A}=\partial M$ есть метрика, то и на $\hat{M}^n \subset P^n$ будет индуцирована метрика. При этом в точке $a \in M$ может быть особой точкой, что не исключает ее возрашение.
Похожий оператор рассматривается в [2][i].

4.5 . Оператор повышения размерности F_Δ^0 , $F_\Delta^0 \circ F_\Delta^0 = F_\Delta^1$ $F_\Delta^n \circ F_\Delta^0 = F_\Delta^{(n+1)}$.

4.6 . Оператор взятия границы F_Δ^n , $\partial F_\Delta^n = \partial \Delta_n$, . $\partial \Delta^n \circ F_\Delta^0 = F_\Delta^n$.

Все гомеоморфизмы при отображении и трансяции метрики сохраняют объем.

5 . Утверждения.

Препятствиеми, мешавшим доказательству проблемы Пуанкаре, является существование *диких* вложений, таких $h:V \to \nu_\varepsilon$, что дополнение к ν_ε не гомеоморфно себе в $\mathbb{R}^n$, несвязно или не односвязно, существование гомеоморфизмов повышающих размерность и существование сфер компоненты которых , внутренее тело и внешность не гомеоморфны себе.
Однако нас интересует не разнообразие 'плохих' отображений, а построение 'хорошего' гомеоморфизма $P^n \to S^n$.
Обзор препятствий приведен в [1[ii]].

5.1 . *Пусть* ${}_M f:\hat{M}^n \setminus \{\hat{C}_i\} \to \Delta_n$ *гомеоморфизм определенный везде на кроме конечного* *количества замкнутых множеств* $\{\hat{C}_i\}$, ***особенностей*** $\hat{M}^n$ *,замкнутых в индуцированной из* P^3 *топологии, таких что их пересечение с* $\partial\hat{M}^n$ *пусто,* $\check{F}^n_\Delta$ *поглощающий оператор. Тогда* ${}_M f^{-1}\circ F^n_\Delta$ *поглощающий оператор, фиксирующий в* $\hat{M}^n$ *метрику и геомерию симплекса* $\Delta_n\setminus a$ *с изъятой точкой и все* ***особеннсти*** $\hat{M}^n$ *выметены в точку* a .

Вариант этого утверждения доказан в [2][iii].

5.2 . *Гомеоморфный образ односвязного в себе подмножества односвязен в себе.*

5.3 . *Для того чтобы каждая окрестность точки в* P^n *имела ручной гомеоморфизм в* $\mathbb{R}^n$ *достаточно:*

5.3.1 . *существования* $h:V\rightarrow\nu_\varepsilon$ *такого, что в* $\nu_\varepsilon\in\mathbb{R}^n$ *содержится хотя бы одна окрестность* $\mathbb{R}^n$.

5.3.2 . *существования* $h:V\rightarrow\nu_\varepsilon$ *такого, что в* $\nu_\varepsilon\in\mathbb{R}^n$ *содержится хотя бы одна окрестность* $\mathbb{R}^n$ *, где* $n\geqslant 1$.

Мы не будем доказывать (4.2.2), поскольку для нашей цели достаточно (5.3.1 .).

Вырежем в окрестности принадлежащей ν_ε правильный симплекс размерности n. Пусть $g:\Delta_\varepsilon\rightarrow\Delta_n$, где Δ_ε h прообраз этого правильного симплекса и Δ_n стандартный симплекс в $\mathbb{R}^n$.

5.4 . Δ_ε *односвязен в себе и имеет в* P^n *непустую внутренность.*

Утверждение приведенное выше эквиваленно проблеме Пуанкаре.

5.5 . *Замкнутое дополнение* $\hat{U}^n$ *к односвязному в себе* Δ_ε , $\hat{U}^n\cup\Delta_\varepsilon=P^n$ *также односвязно в себе.*

5.6 . *Граница односвязного в себе* $\hat{M}^n\subset P^n$ *также односвязна в себе.*

5.7 . *Множества* $\hat{U}^n$ *и* Δ_ε *симметричны по оператору* F^n_Δ .

То есть, $F^n_\Delta\circ g:\hat{U}^n\rightarrow\Delta_n$ и $F^n_\Delta\circ g:\Delta_\varepsilon\rightarrow\Delta_n$.

5.8 . *На* P^n *можно задать разбиение, триангуляцию* $\{V^n_i\}$ *эквивалентную* $\partial\Delta_{(n+1)}$ *такую, что каждый ее элемент односвязен в себе и гомеоморфен* Δ_n .

Для этого достаточно в одном из двух симплексов соединить центр тяжести с вершинами и получить n симплексов, отобразить их на стандартные и добавить оставшийся. Общее количество $\{\Delta^i_n\}$ равно $n+1$ и ему соответствуют гомеоморфизмы $\{g_i\}$.

Парадокс Банаха-Тарского следует из определения (3.3 .).

5.9 . *Пусть задан гомеоморфизм* $f:\Delta_n\rightarrow\hat{V}$ *, где* $\hat{V}$ *компактное, замкнутое, хаусдорфово топологическое пространство со счетной базой. Тогда* $f\circ F^n_\Delta$ ***фиксирует*** *на* $\hat{V}$ *метрику и геометрию* Δ^n *. Т. е.* $\hat{V}$ *стандартный симплекс в индуцированной таким образом метрике.*

Зафиксируем с помощью поглощающего оператора на каждом $\{\Delta^i_n\}$ метрику Δ_n .

5.10 . *Метрику определенную на* $\{\Delta^i_n\}$ *можно дополнить до метрики определенной на*

$\partial\Delta_{(n+1)}$.

5.11 . $F_\Delta^n \circ g_i : \hat{V}^n \to \Delta_n$ *ручные гомеоморфизмы, и их склейка по триангуляции тоже ручной гомеоморфмизм.*

5.12 . $\{\Delta_n^i\}$ *Соответствует* $\{g_i\}$ *, ск лейка которых* $g: P^{(n+1)} \to \partial\Delta_{(n+1)}$ *, ручной гомеоморфизм .*

5.13 . *Пусть* $f: S^n \to \partial\Delta_n$ *гомеоморфизм сферы на поверхность вписанного в нее стандартного симплекса. Тогда* $f \circ F_\Delta^n$ *фиксирует риманову метрику сферы на* $\partial\Delta_n$ *. Если* $g: P^n \to \partial\Delta_n$ *,* $g^{(-1)} \circ f \circ F_\Delta^n$ *фиксирует риманову метрику сферы на* P^n *.*

Определения и утверждения приведенные выше представляются мне прозрачными и очевидными. Тем не менее в них должна быть ошибка, поскольку, и теорема Пуанкаре-Перельмана, изомофизм многообразий Пуанкаре и сферы в более высоких размерностях прямо следуют из локального изоморфизма $g: \Delta_\varepsilon \to \Delta_n$ в более низкой размерностях. Представляется невероятным что это можно не замечать 100 лет. Поэтому мне хотелось бы знать в чем состоит ошибка.

6 . Следствия.

6.1 . *На любом односвязном в себе топологическом непрерывном простраcтве может быть определена метрика и любой гомеомофизм из этого пространства может транслировать эту метрику.*

6.2 . *Любое взаимооднозначное отображение подмножества односвязного в себе непрерывного топологического пространства на подмножество такого же пространства может быть распростанено, если эти подмножества расположены в односвязных в себе компактах.*

i М.А. Штанько, Вложение компактов в эвклидовы проастранства, Математический сборник, 1970 г. т.83 (125) 2 (125). http://mi.mathnet.ru/msb3510

ii Л.В. Келдыш., Некоторые вопросы топологии евклидовых пространств, Успехи математических наук, 1961 г. январь-февраль т. 16 вып. 1(97) http://mi.mathnet.ru/umn6564

iii М.А. Штанько, Вложение компактов в эвклидовы проастранства, Математический сборник, 1970 г. т.83 (125) 2 (125). http://mi.mathnet.ru/msb3510